

# 加加速度的力学计算和物理意义

孟昭曜

(重庆教育学院 计算机与现代教育技术系, 重庆 400067)

**摘要:** 由于军事工业和现代交通的快速发展,使机械的运转和行进的速度加快,加速度的变化率即加加速度,引起了关注. 举例对加加速度进行了计算和讨论,其结果显示:在全球定位系统(GPS)、高速列车、高速电梯、交通事故分析等,忽略了加速度的变化率,所进行的分析和计算是不完备的.

**关键词:** 高速运动; 加加速度; 瞬时力

**中图分类号:** O331 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-8395(2005)06-0741-03

位置矢量  $r$  对时间的一阶导数是速度  $v$ , 二阶导数则为加速度  $a$ , 位置矢量  $r$  的三阶导数, 即加速度的变化率, 称之为加加速度. 现行的教科书并未提及加加速度, 也无从得到其它的信息, 通常的回答是: 牛顿第二定律  $F = ma$  已给出了加速度与力的关系, 虽然在数学上可以继续对该式求导, 但定义加速度的变化率和力的变化率似乎并没有多大的实际意义和应用价值. 加加速度有没有物理意义呢?

(1) 在互联网上的一些中英文文章和讨论表明, 世界上还有人在关注和讨论这一问题, 但较详尽并有说服力的文章很少.

(2) 在有关文章中, P. Gibbs 的 What is the term used for the third derivative of position? (位置的三阶导数意味着什么?) 最为典型, 它给出的有用信息如下<sup>[1]</sup>: 在英语国家的技术界, 加速度的变化率被叫做 jerk (符号  $j$ ); 而在英国, 有时用 jolt 替代 jerk. jounce 曾被用于表示  $r$  对时间的四阶导数, 但其符号容易与 jerk 的混淆, 所以用 snap 表示四阶导数 (符号  $s$ ), 而用 crackle (符号  $c$ ) 和 pop (符号  $p$ ) 分别表示五阶和六阶导数. 更高阶的导数还没有名称, 因为并不常用.

在现代社会, 当工程师们在评估某种机械运动将产生的毁灭性效应或交通工具带给乘员的不舒适度时, 考虑加速度的变化率就显得十分重要了. 例如, 为了乘客舒适和避免危险, 设计人员认为, 高速列车的加加速度应保持在小于  $2 \text{ m/s}^3$ . 在现代航空航天工业, 飞行员和宇航员甚至需要测量加加速度的仪表. 在用哈勃望远镜观测宇宙时, 由于距离的遥远, 可能要考虑  $r$  的四阶导数的大小限制, 即加加速度的变化率.

由于力等于动量对时间的变化率, 所以, 给力对时间的更高阶的导数命名也顺理成章. 目前, 用 yank (符号  $Y$ ) 作为力对时间的变化率, tug (符号  $T$ ) 为 yank 对时间的变化率, snatch (符号  $S$ ) 是 tug 对时间的变化率, shake (符号  $Sh$ ) 则是 snatch 对时间的变化率.

综上所述, 力 = 质量  $\times$  加速度, 即  $F = ma$ ; 瞬时力 = 质量  $\times$  加加速度, 即  $Y = mj$ ; 曳力 = 质量  $\times$  急变加速度, 即  $T = ms$ ; 攫力 = 质量  $\times$  裂变加速度, 即  $S = mc$ ; 颤力 = 质量  $\times$  脉冲加速度, 即  $Sh = mp$ .

(3) P. Gibbs 的工作主要还是停留在数学处理上, 还没有足够的信息或计算说明为什么加加速度在物理上是有意义的和有用的, 虽然也提到了加加速度、瞬时力、高速列车的设计和加加速度计等.

## 1 数字模型

我们提出了一个简单的计算模型来说明问题: 假定高速列车以  $360 \text{ km/h}$  ( $100 \text{ m/s}$ ) 的速度运行, 一乘客的质量是  $100 \text{ kg}$ . 如果列车在  $10 \text{ s}$  内, 速度从  $0$  增加到  $100 \text{ m/s}$ , 它的加速度是  $10 \text{ m/s}^2$ , 而作用在乘客身上的力是  $1000 \text{ N}$ .

如果列车在  $1 \text{ s}$  内, 加速度从  $0$  增加到  $10 \text{ m/s}^2$ , 它的加加速度是  $10 \text{ m/s}^3$ , 而作用在乘客身上的瞬时力将是  $1000 \text{ N/s}$ .

作用在乘客身上的  $1000 \text{ N}$  和  $1000 \text{ N/s}$  是不同的, 一个人能承受  $1000 \text{ N}$  的力, 未必能承受  $1000 \text{ N/s}$  的打击. 所以, 为了乘客的舒适, 保持加加速度小于  $2 \text{ m/s}^3$  是有道理的. 其结果, 作用在乘客身上的瞬时力只有  $200 \text{ N/s}$ , 而列车的加速度从  $0$  增加到  $10 \text{ m/s}^2$  将需时  $5 \text{ s}$ .

根据以下关系

$$v = dx/dt, \quad (1)$$

$$a = dv/dt, \quad (2)$$

$$\text{jerk} = da/dt = 2, \quad (3)$$

$$Yank = mj = dF/dt = 200, \quad (4)$$

可得到

$$a = 2dt = 2t + C_1(t=0, a=0, C_1=0),$$

$$v = adt =$$

$$2tdt = t^2 + C^2(t=0, v=0, C^2=0),$$

$$x = vdt = t^2 dt =$$

$$t^3/3 + C^3(t=0, x=0, C^3=0),$$

$$F = Ydt = 200dt =$$

$$200t + C_4(t=0, F=0, C_4=0).$$

代入数据,详细的计算表明:在最初的5 s,列车的速度将达到25 m/s,此时已驶出41.7 m;而200 N/s的瞬时力将一直作用在乘客身上直至作用在他身上的力达到1 000 N.然后,列车将以10 m/s<sup>2</sup>作匀加速度运动,在7.5 s内,列车速度将从25 m/s增加到100 m/s.整个加速过程将持续12.5 s,期间列车行驶了510.4 m.

以上计算表明,如果只涉及力和加速度,没有引入瞬时力和加加速度,就不能理解上述加速过程的细节,因为可能忽略了最初的5 s(加速度从0增加到10 m/s<sup>2</sup>)以及1 000 N和1 000 N/s的区别,而且两者的计算结果也是有出入的.

## 2 加加速度应用实例

**例1** 加加速度已作为全球定位系统(GPS)的重要技术指标.

下面是世界上著名的专业GPS生产厂家美国GARMIN公司全新推出GPS eTrex(中文)导航型接收机的主要技术指标<sup>[2]</sup>.

(1) 导航特性.

航路点:500个可命名及定义图表字符的航点

航迹:10条可自动生成的航迹

航线:1条包含50个航点的航线

旅行提示器:当前速度、平均速度、最大速度、日出/日落时间、航程、航程时间、待航时间、到达时间、高度...

(2) 接收特性.

接收机:并行12通道,共同跟踪切换、适时修改当前位置

定位时间:热启动15 s

冷启动45 s

自动定位小于1.5 min

数据更新率:数据更新率1次/s,连续更新

定位精度:<10MRMS,1-3 m(差分定位)RMS

动态性能:速度514 m/s,加速度6 g,加加速度60 m/s<sup>3</sup>

在其动态性能中,发现了加加速度这一指标,而且其加加速度值高达60 m/s<sup>3</sup>!为什么GPS定位系统需要加加速度作为其技术指标呢?

原来,导航型接收机主要用于运动载体(车、船、飞机、卫星等)的导航,载体上的GPS接收机天线在跟踪GPS卫星的过程中相对地球而运动,接收机必须要观测4颗以上的GPS卫星,并利用GPS信号实时地计算出载体的瞬间三维位置和三维速度.由于运动载体一般不是做匀速直线运动,GPS也没有指北针的功能,静止不动时它是不知道方向的.但是,一旦动了起来,它就能知道运动方向和运动轨迹,因为GPS每隔一秒更新一次当前地点信息,每一点的坐标和上一点的坐标进行比较,就可以知道前进的方向,尤其是在拐弯的时候(此时就有加速度的变化!),你会看到显示的数值在不停的变化.因此,要使计算尽可能地精确,类似于我们前面关于高速列车的讨论和计算,忽略了加加速度(即没有考虑加速度的变化率),计算得出的加速度、速度及所经历的路程都是有误差的,载体的运动速度越快,这个误差会越大.由于飞机运行速度快,因此,在航空上用的接收机还要求能适应高速运动.由于卫星的速度高达7 km/s以上,用于卫星的导航定位的接收机对这一技术指标的要求更高,甚至如P. Gibbs的文章所言,可能要考虑加加速度的变化率.

**例2** 加加速度帮助研究交通事故的具体细节.

在碰撞实验中,一辆载有模拟假人的待测轿车以50 km/h的速度撞向墙壁,碰撞在瞬间完成.要详细研究这一碰撞过程及对人体的伤害,也是借助高速摄像机和计算机分析软件,得到车上各个标志点的位移、速度、加速度、加加速度和碰撞时间,由此做出车体和人体的变形图来模拟和分析这一过程的各种细节.为了尽可能减少在这一碰撞过程中对车内乘员的伤害,一个关键问题是安全气囊点爆的时机.如果根据轿车速度的变化及所需时间而求得加速度,再由所受力来推动点爆机关,安全气囊

的打开就晚了. 因为根据我们前面的分析, 在这瞬间的碰撞中, 加速度的变化率是相当大的, 而在加速度变化的过程中, 作用在乘员身上的瞬时力一直存在且足以伤人. 因此, 为了求得安全气囊打开的最佳时机, 就不应以乘员的受力极限作为判据, 而应以乘员受瞬时力的极限作为判据(瞬时力的计算又依赖于加加速度的概念). 这样, 安全气囊在碰撞刚一发生时就打开了, 而不是延迟到在碰撞中或结束时, 因为加加速度是比加速度高阶的导数. 最新的研究已涉及到如何保护车外的行人. 据统计, 美国每年约有 7 万人被车撞伤, 碰撞部位大多是汽车的保险杠和驾驶室的玻璃窗, 考虑安装车外安全气囊是目前的研究思路. 在这里, 同样有一个安全气囊点爆的时机问题, 需要借助加加速度和瞬时力的概念来加以计算和研究.

**例 3** 加加速度已用于描述、测试和控制电梯的起制动特性及运行过程.

随着城市建设的现代化, 高层和超高层建筑越来越多, 因而高速电梯的使用就很广泛了, 如上海金茂大厦就高达 88 层, 电梯速度达  $9.1 \text{ m/s}$ . 电梯在运行中, 起动和制动相当的频繁, 也就是说, 其加速度的变化相当明显. 现在, 电梯运行的舒适感也

是可以用来表示的, 那就是电梯运行的振动分析, 包括轿箱 3 个方向的振动水平. 具体有: 加速度, 加加速度, 最大振动峰值, 噪音等指标<sup>[3]</sup>.

下面是安徽中科智能高技术有限公司生产的 DT-4 电梯加速度测试仪的主要功能特点:

(1) 基于 Windows 的全中文友好界面, 支持快捷按钮, 操作方便, 实时、动态显示电梯起制动及 3 方向振动曲线.

(2) 使用三维加速度传感器, 自动识别电梯运行的不同过程, 并计算出反映起制动特性及垂直、水平振动特性的多项参数. 可以显示和绘制加速度-时间(-)曲线、速度-时间(-)曲线、加加速度-时间(-)曲线以及垂直、水平三方向振动曲线<sup>[4]</sup>.

在这里, 我们又一次看到, 加加速度这一概念被用于实际的机电工程设备中.

以上事例说明: 在高速运动领域, 加加速度的概念是有意义和有用的.

我国的物理教学改革已经引起人们的广泛关注, 而利用互联网和现代信息手段进行探究性学习, 则有相当的吸引力<sup>[5,6]</sup>. 本文给出的对加加速度的探究说明, 可以借助互联网, 通过搜集资料, 展开讨论和计算, 让学生们体验探究性学习.

## 参考文献

- [1] Gibbs P. What is the term used for the third derivative of position[DB/OL]. <http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/jerk.html>, 1998.
- [2] 般若网络科技有限公司网站. eTrex(中文)导航型接收机的主要技术指标[DB/OL]. <http://www.banruo.net/XBS.htm>, 2005-8-30.
- [3] 张聚, 杨庆华, 周国斌, 等. 高速电梯机械系统振动的分析与计算[J]. 机电工程, 2000, 17(4): 78~82.
- [4] 安徽中科智能高技术有限公司网站. DT-4 电梯加速度测试仪的主要功能特点[DB/OL]. <http://www.casbrain.com/product/dt4dt.asp>, 2005-8-30.
- [5] Meng Z Y. Physics education for the 21st century: avoiding a crisis[J]. Phys Educ, 2002, 37(1): 7~8.
- [6] Meng Z Y. The new national curriculum: a challenge to physics teachers[J]. Phys Educ, 2003, 38(1): 2~3.

## Mechanical Calculation and Physical Understanding of the Derivative of Acceleration

MENG Zhao-yao

(Department of Computer and Education Technology, Chongqing College of Education, Chongqing 400067)

**Abstract** Because of rapid development in the military industry and modern communication, the motion velocity of the mechanism is sped up. The derivative of acceleration, namely, the jerk, should be given more attention. The calculation and discussion are performed for the jerk with some examples. The results show that in GPS, high speed trains, high speed elevators and communication accident analyses, these calculations and discussions are not perfect with neglecting the derivative of acceleration.

**Key words**: High speed motion; Jerk; Yank

(编辑 李德华)